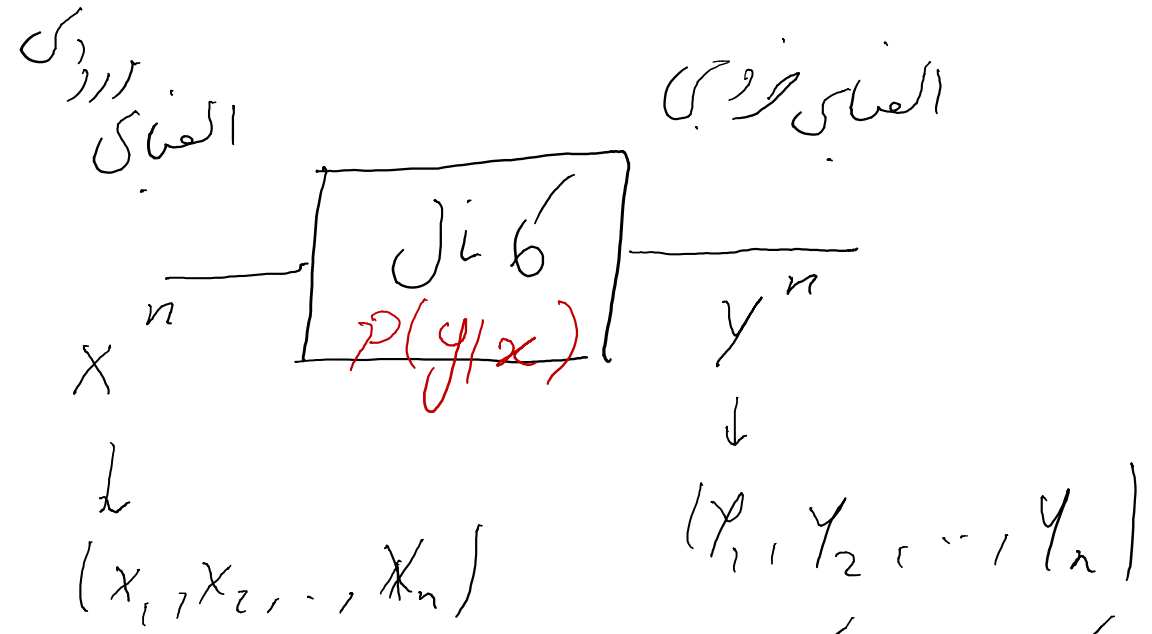


به نام خدا

طریقت کمال

اگر فضای ورودی x^n به صورت
مناسبتی انتخاب شود، در خروجی!
مشاهده y^n ، سیگنال اصلی

ارسالی! یا خطای به میزان رگناه کم، یا بیایید برد ما نرم رحمی که می توان
با آن احمیات! یا خطای به میزان رگناه کم استعاره سازی کرد، طریقت کمال
گویم



۱- نزاع کانالهاى كه در اين كش مطرح مى شوند

۱- كانال كسته با القباى در ردی ورودی محدود

۲- كانال كسته با القباى در ردی خروجی پیوسته

۳- كانال پیوسته

۴- كانال كسته

كانال كسته با القباى محدود ورودی X و القباى محدود خروجی Y و ماتریس

انتقال $P(y|x)$

د مارتین انتال $P(y|x)$ که نمایش دهنده احتمال خردی y به شرط ورودی x است، از نظر x لایم

اگر خردی در هر گام فقط به ورودی در همان گام بستگی داشته باشد، مثال:
سی حافظه لایم

$$P(y_n | x_n, x_{n-1}, \dots, x_0, y_{n-1}, \dots, y_0) = P(y_n | x_n)$$

↑
کافیست حافظه

- ظرفیت اطلاعاتی کانال Information Channel Capacity

ظرفیت اطلاعاتی یک کانال بدون حافظه به صورت زیر تعریف می شود

$$C = \max_{P(x)} I(x; y)$$

ظرفیت عملی کانال (بر حسب bit / channel use) نشان دهنده میانگین نرخ ممکن برای ارسال اطلاعات با خطای به میزان دلخواه کم، است. نشان دهنده نشان می دهد ظرفیت عملی، ظرفیت اطلاعاتی کانال با هم بستن هستند. به همین جهت دارا به از بابت ظرفیت کانال در هر دو حالت استفاده خواهم کرد.

مثال: کانال با نویز بدون فیدبک

x y

0 → 0

1 → 1

حرفیت این کانال برابر 1 (bit/channel use) است.

حرفیت اطلاعاتی کانال به صورت زیر است

$$C = \max_{P(x)} I(x; y) = \max (H(x) - \underbrace{H(x|y)}_0)$$

$$= \max_{P(x)} H(x) = \lg |X| = 1$$

↑
توزیع یکنواخت

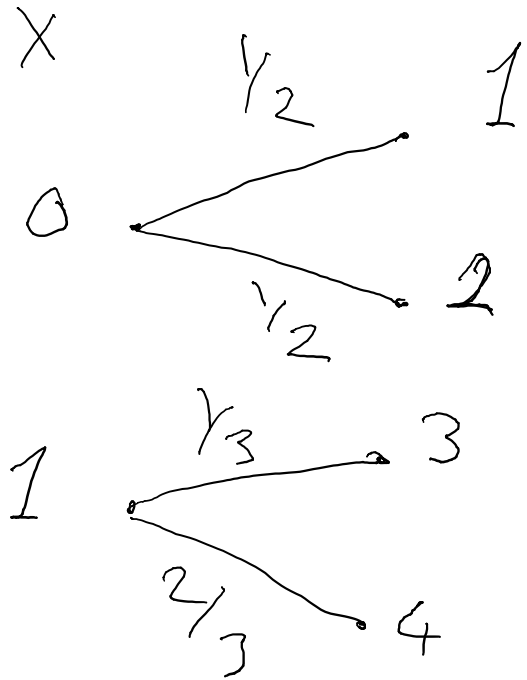
مثال: کانال ندریزی با خروجی نا همبستگی

خصوصیت این کانال برابر 1 است. چون گزینه
 یادداشت مقدار $\{1, 2\}$ می توانیم پیام 0
 را اشتباه سازی کند، یادداشت مقدار $\{3, 4\}$
 می توانیم پیام ایسالی را اشتباه سازی کند.

خصوصیت اطلاعاتی کانال

$$C = \max_{P(x)} I(X; Y) = \max_{P(x)} (H(X) - \underbrace{H(X|Y)}_0)$$

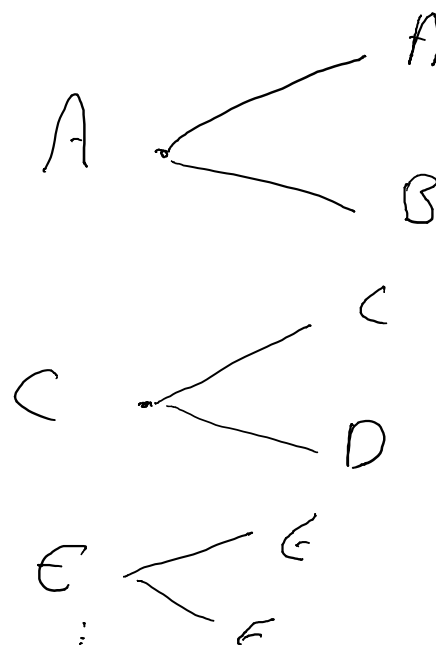
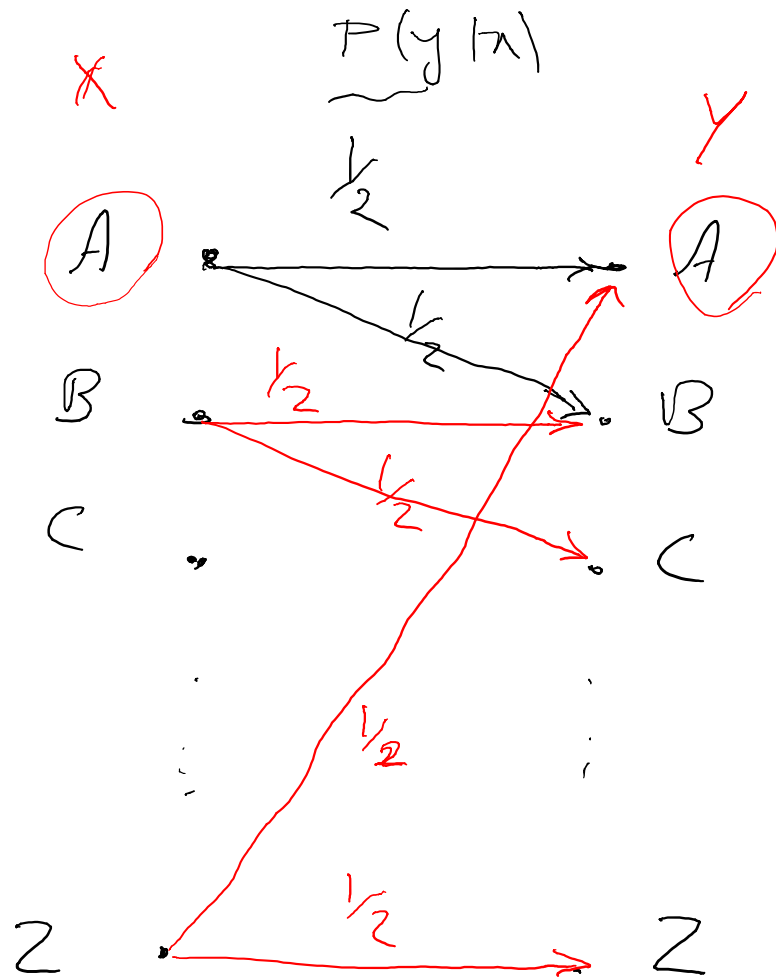
$$= \max_{P(x)} H(X) = \log |X| = 1$$



مثال: ماشین تکریر خط دار

ماشین تکریر، با نشردن دکه در حرف، با احتمال $\frac{1}{2}$ همان حرف، با احتمال $\frac{1}{2}$ حرف جدیدی را تایید می کند.

برای می می به خصوص عملی، حرف ای به صورت زیر دسته بندی می کنیم



با این دسته بندی می توانیم 13 سبیل را به دو دسته انتقال دهیم بنابراین ظرفیت این کانال 13 و با ضرایب بود.

ظرفیت اطلاعاتی کانال

$$C = \max_{P(x)} I(x; y) = \max_{P(x)} \left(H(y) - \underbrace{H(y|x)}_{H(y, 1/2)} \right)$$

$$= \max_{P(x)} (H(y) - 1) = \left[\max_{P(x)} H(y) \right] - 1$$

$$P(y=A|x=A)$$

$$P(y=A|x=Z)$$

$$P_r \{ y=A \} = \frac{1}{2} P_r \{ x=A \} + \frac{1}{2} P_r \{ x=Z \} \Rightarrow$$

الترتیب x و y را عوض می کنیم

$$\Rightarrow \max_{P(x)} H(y) = \lg 26$$

$\uparrow$
 $P(x)$ متساوي
 $\leftarrow P(y)$ متساوي

$$\Rightarrow C = \lg 26 - \underbrace{1}_{\lg 2} = \lg 13$$

$$\begin{aligned}
 H(y|x) &= \sum_{x_i} P(x_i) H(y|x=x_i) \\
 &= \sum_{A}^2 P(x_i) H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \underbrace{\sum_A^2 P(x_i)}_1
 \end{aligned}$$

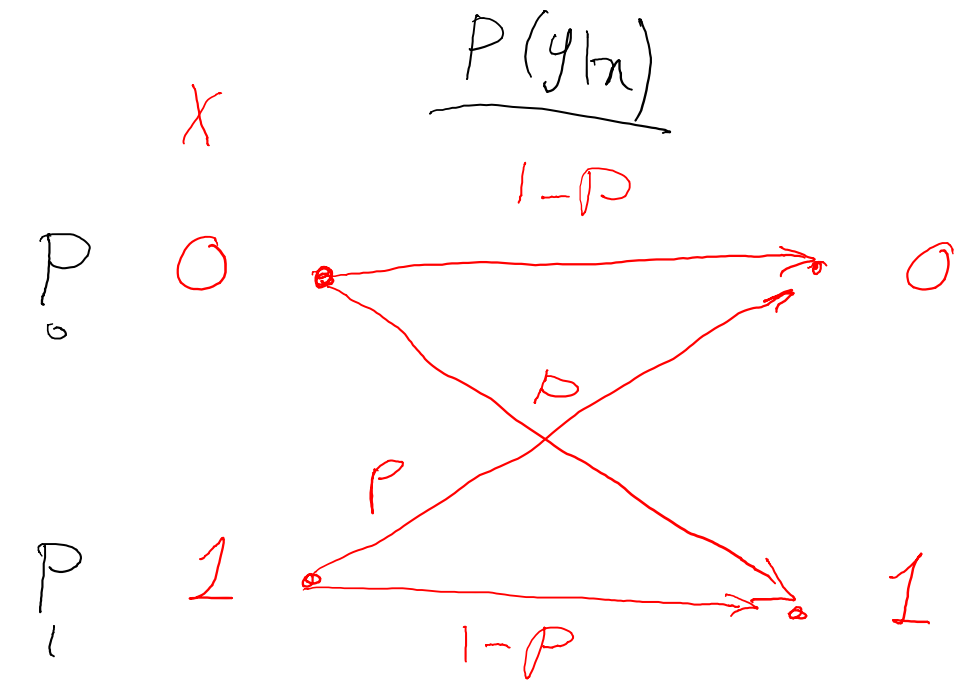
BSC

(Binary symmetric

channel

مثال: کانال باینری متقارن

طرح مسأله کانال



$$C = \max_{P(x)} I(X; Y)$$

$$\Rightarrow C = \max_{P(x)} (H(Y) - H(Y|X))$$

$$P_0 \{X=0\} = P_0$$

$$P_1 \{X=1\} = P_1$$

$$P_0 + P_1 = 1$$

$$H(y|x) = \sum_x p(x) H(y|x=x)$$

$$= p_0 H(y|x=0) + p_1 H(y|x=1)$$

$$= p_0 H(p) + p_1 H(p) = H(p) \rightarrow \begin{matrix} \text{متوسط الإنتروبيا} \\ p(x) \end{matrix}$$

$$H(p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$$

$$H(p, 1-p) = H(\text{Bernoulli}(p))$$

$$C = \max_{P(x)} (H(y) - H(P))$$

$$= \left[\max_{P(x)} H(y) \right] - H(P)$$

$$P_x \{ y=0 \} = \overbrace{P(y=0|x=0)}^{1-P} \overbrace{P(x=0)}^{P_0} + \overbrace{P(y=0|x=1)}^P \overbrace{P(x=1)}^{P_1}$$

$$= P_0(1-P) + P P_1 = P_y$$

$$P_x \{ y=1 \} = P_0 P + P_1(1-P) = P_y$$

$$\Rightarrow H(y) = -P_y \log P_y - P_y \log P_y \xrightarrow[P_1=1-P_0]{\max_{P(x)}} \frac{\partial H(y)}{\partial P_0} = 0$$

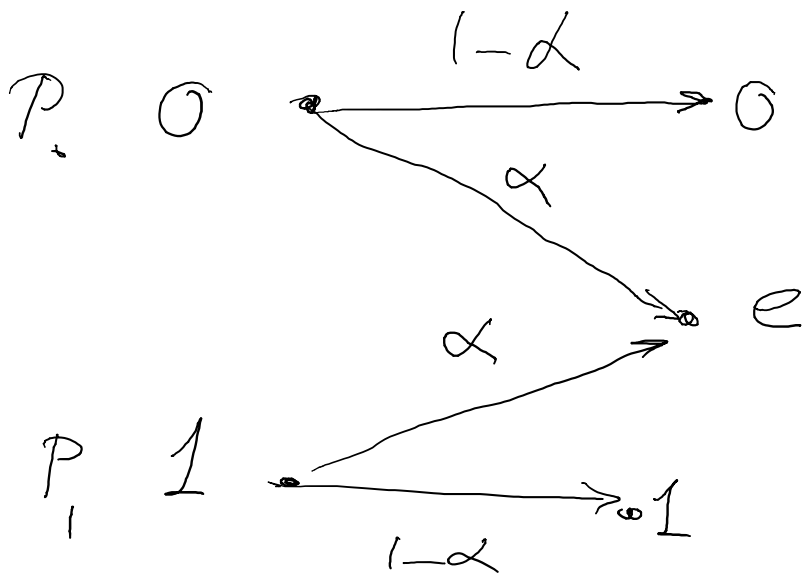
✓
✓

کانترکیم $H(1/2)$ به این ای توزیع کنترکافت Y حاصل می شود (د)، که این توزیع
کنترکافت درودی، توزیع کنترکافت (خروجی) است (۱۰۰)

$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{y_0} = P_{y_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow H(Y) \Big|_{\max} = 1$$

$$\Rightarrow C = 1 - H(P)$$

مثال: کانال BEC (Binary Erasure Channel)



در هر بار ارسال با احتمال α ، خروجی از سیستم
خداوند بر روی α اطلاعات ارسال می‌شود

ظرفیت اطلاعاتی کانال

$$C = \max_{P(x)} I(X; Y)$$

$$\Rightarrow C = \max_{P(x)} (H(Y) - H(Y|X)) = \max_{P(x)} (H(Y) - H(\alpha))$$

$$H(Y|X) = P_0 H(Y|X=0) + P_1 H(Y|X=1) = P_0 H(\alpha) + P_1 H(\alpha)$$

$$\Rightarrow C = \max_{p(x)} (H(y)) - H(x)$$

$$P_r \{y=0\} = P_0(1-\alpha)$$

$$P_r \{y=e\} = P_0\alpha + P_1\alpha = \alpha$$

$$P_r \{y=1\} = P_1(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow H(y) = -P_0(1-\alpha) \overbrace{\lg P_0(1-\alpha)}^{\lg P_0 + \lg(1-\alpha)} - \alpha \lg \alpha - P_1(1-\alpha) \overbrace{\lg P_1(1-\alpha)}^{\lg P_1 + \lg(1-\alpha)}$$

$$\Rightarrow H(y) = (1-\alpha) \overbrace{H(P_0) - (1-\alpha) \lg(1-\alpha)}^{H(x)} - \alpha \lg \alpha$$

$$\Rightarrow H(Y) = (1-\alpha) H(P_0) + H(\alpha)$$

$$\max H(Y)$$

$$\implies$$

$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$$

$$H(P_0) = 1$$

max

$$H(Y) \Big|_{\max} = (1-\alpha) + H(\alpha)$$

$$\Rightarrow C = (1-\alpha) + H(\alpha) - H(\alpha) = \boxed{1-\alpha}$$

کمال متقارن

کلماتی که دارای خصوصیات زیر باشند را کلماتی متقارن گوییم

- ۱- مارتین که از هر عرضی داشته باشد
- ۲- در مارتین که از هر سطر قابلیت سطر داری باشد
- ۳- در مارتین که از هر ستون قابلیت ستون داری باشد

مثال: کدال متبادر با ترسی کند، زیر در شرطی لبرم

$$P(y|x) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij} = P\{y=x_j \mid x=x_i\}$$

$$x_j, x_i \in \{1, 2, 3\}$$

رایس مثال

$$C = \max_{p(x)} (H(y) - H(y|x))$$

$$H(y|x) = \sum_{i=1}^3 P_r(x=i) H(y|x=i)$$

$$H(y|x=1) = H(0.3, 0.2, 0.5) = H(\text{سه, د, ج}) = H(\underline{r})$$

$$H(y|x=2) = H(0.5, 0.3, 0.2) = H(\text{سه, د, ج}) = H(\underline{r})$$

$$H(y|x=3) = H(0.2, 0.5, 0.3) = H(\text{سه, د, ج}) = \underbrace{H(\underline{r})}_{\text{سه, د, ج}}$$

$$\Rightarrow H(\cancel{y}|x) = H(\underline{r})$$

$$\Rightarrow C = \left(\max_{P(n)} H(y) \right) - H(\underline{r})$$

$$P\{Y=j\} = \sum_{i=1}^3 P(Y=j|X=i) \underbrace{P(X=i)}_{P_i}$$

$$j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow P\{Y=j\} = \sum_{i=1}^3 P_{ij} P_i$$

✓ / ✓
سرها جابجایی
✓ / ✓
✓ / ✓

توزیع مضاف خود می باشد.
از برای توزیع مضاف ورودی
حاصل می شود

$$\Rightarrow P\{Y=j\} = \frac{1}{|X|} = \sum_{i=1}^3 P_{ij} \frac{1}{|X|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|X|} = \frac{1}{|X|} \underbrace{\sum_{i=1}^3 P_{ij}}_k = \frac{k}{|X|} = \frac{1}{|X|}$$

جمع عناصر ردی سطرهای ماتریس که $k=1$

در این مثال
ماتریس آرگان
صاف می باشد، $k=1$

$$\Rightarrow C = \log |\gamma| - H(\underline{r})$$

در این مثال، از درجی بودن ماتریس $\underline{L}$ و قابلیت جردن سترنگ در محاسبه ظرفیت استفاده می‌کنیم. بنابراین می‌توانیم که لای ماتریس $\underline{L}$ صحیح زیر تعریف کنیم

که $\underline{L}$ متوازن صحیح کامل است که در آن
۱- هر قطر قابلیت سفری را می‌رساند

۲- جمع عناصر روی سترنگی ماتریس $\underline{L}$ یک مقدار ثابت k است

$$\Rightarrow C = \log |\gamma| - H(\underline{r}) \quad , \quad \frac{1}{|\gamma|} = \frac{k}{|\gamma|}$$

مثال:

$$P(y|x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k = 2/3} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}$

$$\Rightarrow H(y|x) = H(\underline{r}) = H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$C = \lg |\mathcal{Y}| - H(\underline{r}) = \lg 3 - H(\underline{r})$$

$$H(y) \Big|_{\max} \quad \underline{\underline{H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}}$$

توزیع یکنواخت، سردی

توزیع یکنواخت
X سردی

$$\left. \begin{aligned} P_r\{Y=j\} &= \sum P_{ij} P_i \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

